模块四 分段函数问题

第 1 节 分段函数基础题型（★★☆）

强化训练

1．（2021・浙江卷・★）已知 $a \in \mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4, x>2\\ |x-3|+a, x\le 2\end{cases}$，若 $f(f(\sqrt{6}))=3$，则 $a=$_____.

答案：2

解析：双层函数值计算，先算里面那一层，由题意，$f(\sqrt{6})=(\sqrt{6})^2-4=2$，

所以 $f(f(\sqrt{6}))=f(2)=|2-3|+a=1+a=3$，解得：$a=2$.

2．（2022・辽宁沈阳模拟・★★）设 $f(x)=\begin{cases}x-2, x\ge 10\\ f(f(x+6)), x<10\end{cases}$，则 $f(5)=$（　　）

（A）8　（B）9　（C）10　（D）11

答案：D

解析：$5<10$，所以求 $f(5)$ 应先代入 $x<10$ 那一段，由题意，$f(5)=f(f(5+6))=f(f(11))$，

接下来计算 $f(11)$，代 $x\ge 10$ 那段，因为 $f(11)=11-2=9$，所以 $f(f(11))=f(9)=f(f(9+6))=f(f(15))$，

又 $f(15)=15-2=13$，所以 $f(f(15))=f(13)=13-2=11$，故 $f(5)=11$.

3．（2022・河北模拟・★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, x\le 1\\ -\log_2(x+1), x>1\end{cases}$，且 $f(a)=-3$，则 $f(6-a)=$（　　）

（A）$-\frac{7}{4}$　（B）$-\frac{5}{4}$　（C）$-\frac{3}{4}$　（D）$-\frac{1}{4}$

答案：A

解析：因为不确定 a 与 1 的大小，所以通过分类讨论，代入解析式，

若 $a\le 1$，则 $f(a)=2^{a-1}-2=-3$，故 $2^{a-1}=-1$，无解；

若 $a>1$，则 $f(a)=-\log_2(a+1)=-3$，解得：$a=7$，所以 $f(6-a)=f(-1)=2^{-1-1}-2=-\frac{7}{4}$.

4．（★★★）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-1$，若 $f(f(x))=1$，则 $x=$_____.

答案：3

解析：看到复合结构的方程，先将内层的 $f(x)$ 换元成 t，化整为零，令 $t=f(x)$，则 $f(f(x))=1$ 即为 $f(t)=1$，

因为 $f(x)$ 的解析式较为简单，容易画图，所以可合图象来解方程 $f(t)=1$，

函数 $y=f(t)$ 的图象如图 1，直线 $y=1$ 与该图象只有 1 个横坐标为 2 的交点 A，所以 $t=2$，故 $f(x)=2$，

函数 $y=f(x)$ 的图象如图 2，直线 $y=2$ 与该图象只有 1 个横坐标为 3 的交点 B，所以 $x=3$.

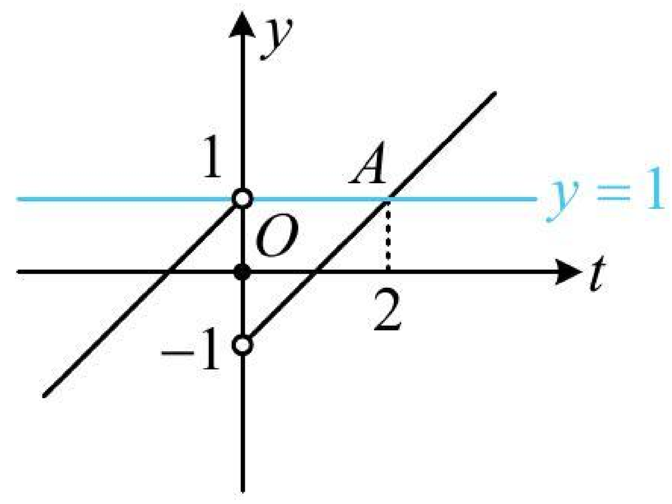


图1

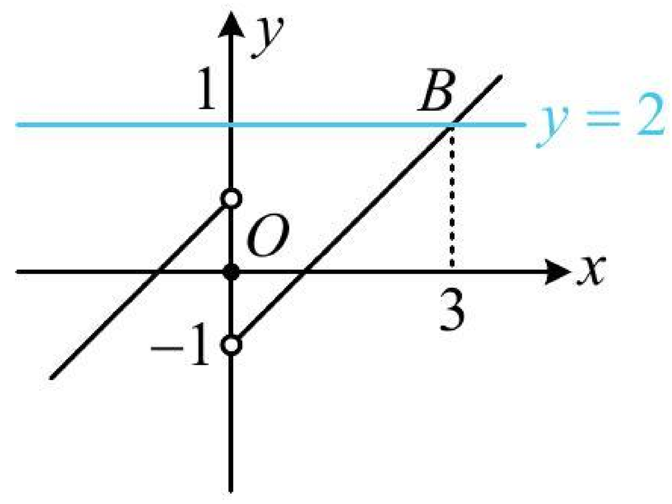


图2

5.（2022•甘肃模拟•★★）若函数 $f(x)=\begin{cases}(a-1)x-2a,x<2\\ \log_a x,x\ge 2\end{cases}$ 在 **R** 上单调递减，则实数 a 的取值范围为_____.

答案： $[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

解析： 先考虑两段分别↘，当 $x<2$ 时，$f(x)=(a-1)x-2a$ 要↘，应有 $a-1<0$，所以 $a<1$ ①；

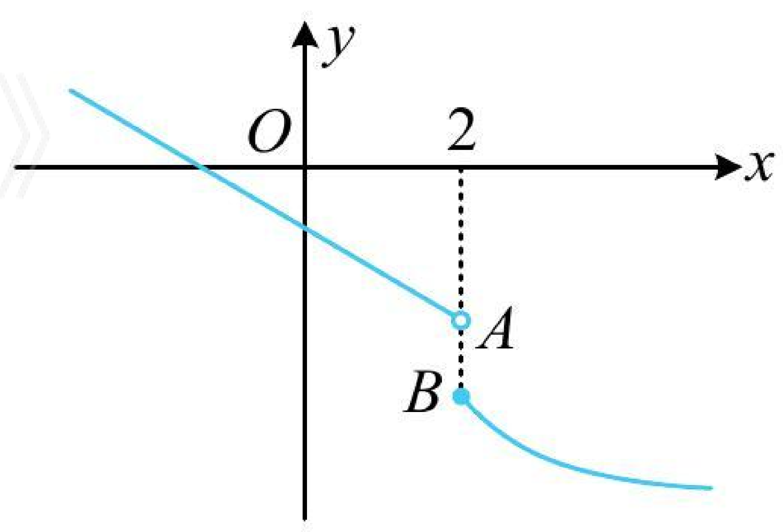
当 $x\ge 2$ 时，$f(x)=\log_a x$ 要↘，应有 $0<a<1$ ②；

再考虑间断点处的拼接情况，如图，将 $x=2$ 代入 $y=(a-1)x-2a$ 可得 $y=-2$，所以 $A(2,-2)$，

同理，$B(2,\log_a 2)$，由图可知 A 应在 B 的上方或 A，B 重合，

所以 $(a-1)\cdot 2-2a\ge \log_a 2$，故 $\log_a 2\le -2=\log_a \frac{1}{a^2}$③，

由①②可得 $0<a<1$，所以③等价于 $\frac{1}{a^2}\le 2$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le a<1$.



6.（★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax-1,x\le 1\\ \ln(2x^2-ax),x>1\end{cases}$ 在 **R** 上为增函数，则实数 a 的取值范围是_____.

答案： $(0,1]$

解析： $x>1$ 那一段有对数，故先考虑定义域的要求，对任意的 $x\in(1,+\infty)$，都有 $2x^2-ax>0$，

所以 $2x-a>0$，从而 $a<2x$，显然 $2x$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$，故 $a\le 2$；

再考虑 $f(x)$ 两段各自为增函数，应有 $\begin{cases}a>0\\ \frac{a}{4}\le 1\end{cases}$，所以 $0<a\le 4$，结合 $a\le 2$ 可得 $0<a\le 2$；

最后考虑间断点处左右两侧的要求，应有 $a-1\le \ln(2-a)$，所以 $a-1-\ln(2-a)\le 0$ ①，

$a=2$ 不满足不等式①，故只需在 $(0,2)$ 上求解不等式①，对于超越不等式或超越方程，若能判断单调性，观察出根，则可据此求得结果，

注意到函数 $\varphi(a)=a-1-\ln(2-a)$ 在 $(0,2)$ 上↗，且 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(a)\le 0\Leftrightarrow 0<a\le 1$.

7．（2022•达州二诊•★★★）已知单调递增的数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}m^{n-9},n\ge 10\\(\frac{2m}{9}+1)n-21,n<10\end{cases}$，则实数$m$的取值范围是（　　）

（A）$[12,+\infty)$　（B）$(1,12)$　（C）$(1,9)$　（D）$[9,+\infty)$

答案：B

解析：先考虑$\{a_n\}$在两段上都单调递增，由题意，应有$\begin{cases}m>1\\\frac{2m}{9}+1>0\end{cases}$，所以$m>1$；

其次，在分段处，应满足$a_9<a_{10}$，所以$(\frac{2m}{9}+1)\times 9-21<m$，解得：$m<12$，故$1<m<12$.

8．（2022•北京西城二模•★★★）若函数$f(x)=\begin{cases}2^x+3,x\le 0\\(x-2)^2,0<x\le a\end{cases}$的定义域和值域的交集为空集，则实数$a$的取值范围是（　　）

（A）$(0,1]$　（B）$(0,1)$　（C）$(1,4)$　（D）$(2,4)$

答案：B

解析：由题意，$f(x)$的定义域是$(-\infty,a]$，下面分两段分别求$f(x)$的值域，且结果应均与$(-\infty,a]$无交集，

当$x\le 0$时，$f(x)=2^x+3$，因为$3<2^x+3\le 4$，所以$f(x)$在$(-\infty,0]$上的值域为$(3,4]$；

此时要使$f(x)$的定义域和值域交集为空集，则$0<a\le 3$；

下面再考虑第二段的值域，要讨论a和二次函数$y=(x-2)^2$对称轴$x=2$的位置关系，

当$0<a\le 2$时，$f(x)$在$(0,a]$上的值域为$[(a-2)^2,4)$，

要使定义域$(-\infty,a]$与$[(a-2)^2,4)$的交集为空集，应有$(a-2)^2>a$，解得：$a<1$或$a>4$，故$0<a<1$，

当$2<a\le 3$时，$f(x)$在$(0,a]$上的值域为$[0,4)$，此时$f(x)$的定义域和值域交集不为空集，不合题意，

综上所述，实数a的取值范围是$(0,1)$.